BEZIEHUNGEN DER $\mathfrak{E}_7$ UND $\mathfrak{E}_8$ ZUR OKTAVENEBENE. V.

VON

HANS FREUDENTHAL

(Communicated at the meeting of February 28, 1959)

13. *Ergänzungen und Berichtigungen zu* 1–12.[1])

13.1. Die in 11.3 algebraisch dargestellten Perspektivitäten erschöpfen die Perspektivitäten der Oktavenebene, d.h. die Projektivitäten mit einer punktweise invarianten Geraden B, der Achse, und einem geradenweise invarianten Punkt A, dem Scheitel von $\Pi^{\varkappa}_{A,B}$.

Man braucht das nur zu beweisen für nichtinzidente A, B. Fasst man B als uneigentliche Gerade einer affinen Oktavenebene auf, so ist die Aussage äquivalent mit der, dass die Multiplikationen in der affinen Oktavenebene nur dann Affinitäten sind, wenn der Multiplikationsfaktor $\varkappa$ reell ist. Das ist eine bekannte Tatsache.

Ohne Berufung darauf beweist man es direkt folgendermassen:

Als A und B nehmen wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}.$$

$F \times G$ schneidet B in

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Pi_{A,B}F$ liegt auf $A \times F$, also etwa

$$\Pi_{A,B}F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & a \\ 0 & \bar{a} & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

$$\Pi_{A,B}G = (A \times G) \times (H \times \Pi_{A,B}F)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{a} & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Siehe I–IV in Proceed. Kon. Akad. Wet., **A 57** (1954), 218–230, 363–368; **58** (1955), 151–157, 277–285.

$K = (F \times X) \times B, \qquad L = (G \times X) \times B.$

$$K = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 - \bar{x}_2 & 0 \\ \bar{x}_3 - x_2 & \xi_2 + \xi_3 - 2Re\, x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_3 - 2Re\, x_2 & x_3 - \bar{x}_1 & 0 \\ \bar{x}_3 - x_1 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Pi_{A,B} X$ liegt auf $A \times X$, auf $K \times \Pi_{A,B} F = K'$ und auf $L \times \Pi_{A,B} G = L'$.

$$K' \begin{pmatrix} x_3(\xi_2 + \xi_3 - 2Re\, x_1) & x_3(x_3 - \bar{x}_2) & (x_3 - \bar{x}_2)a \\ -x_3(\bar{x}_3 - x_2) & x_3\xi_1 & -\xi_1 a \\ \bar{a}(\bar{x}_3 - x_2) & -\xi_1\bar{a} & x_2\xi_1 \end{pmatrix},$$

$$L' = \begin{pmatrix} x_3\xi_2 & -x_3(x_3 - \bar{x}_1) & -\xi_2 a \\ -x_3(\bar{x}_3 - x_1) & (\xi_1 + \xi_3 - 2Re\, x_2)x_3 & (\bar{x}_3 - x_1)a \\ \xi_2\bar{a} & \bar{a}(x_3 - \bar{x}_1) & x_2\xi_2 \end{pmatrix}.$$

K', L' und $A \times X$ müssen durch einen Punkt gehen.

$$K' \times (A \times X) = \begin{pmatrix} \xi_1^2\alpha_2 & \xi_1\alpha_2 x_3 & \xi_1\bar{x}_2 a \\ \xi_1\alpha_2\bar{x}_3 & \xi_1\xi_2\alpha_2 & \bar{x}_3(\bar{x}_2 a) \\ \xi_1\bar{a}x_2 & (\bar{a}x_2)x_3 & \xi_1\xi_3 a \end{pmatrix},$$

$$L' \times (A \times X) = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_2\alpha_2 & \xi_2\alpha_2 x_3 & x_3(x_1 a) \\ \xi_2\alpha_2\bar{x}_3 & \xi_2\alpha_2 & \xi_2 x_1\bar{a} \\ (\bar{a}\bar{x}_1)\bar{x}_3 & \xi_2 a\bar{x}_1 & \xi_2\xi_3\alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Damit das dieselben Punkte sind (für alle X), muss a reell sein.

In der komplexen und in der Quaternionen-Ebene gilt die Behauptung nicht. Nennen wir Perspektivitäten mit reellem Doppelverhältnis *hermitesch* [1]), so gilt in der reellen und in der Oktaven-Ebene, aber nicht in der komplexen und Quaternionen-Ebene, dass alle Perspektivitäten hermitesch sind.

13.2. Die in 3 definierte Darstellung Inv $(\mathfrak{M})$ der $\mathfrak{E}_7$ ist transitiv über den Paaren P_1, P_2 von Ebenen mit leerem Durchschnitt, d.h. mit $\{P_1, P_2\} \neq 0$.

Beweis: In 6 war die Invarianz über $\mathfrak{M}$ gezeigt. Wir dürfen daher annehmen

$$P_1 = (0, \quad 0, \quad 1, \quad 0),$$
$$P_2 = (X, \quad U, \quad \xi, \quad \omega) \qquad \text{mit } \omega \neq 0$$

und uns begnügen mit der Angabe eines $f \in \mathrm{Inv}\ (\mathfrak{M})$, so dass

$$fP_1 = P_1, \quad fP_2 = (0, 0, 0, \omega)$$

ist. Das leistet $f = \exp\, \tau\,\Theta$ mit gewissen τ und

$$\Theta = \exp\ (0, \quad 0, \quad -X/\omega, \quad 0).$$

1) In Anlehnung an eine Titssche Terminologie bei Polaritäten.

Nämlich

$$\begin{aligned}
\Theta P_2 &= (-X, & -2U, & -(X, U)/\omega, & 0),\\
\Theta^2 P_2 &= (0, & 2U, & 2(X, U)/\omega, & 0),\\
\Theta^3 P_2 &= (0, & 0, & -2(X, U)/\omega, & 0),\\
\Theta^4 P_2 &= (0, & 0, & 0, & 0),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

13.3 [1]). In 1, Z. 5, füge man ein hinter $\chi(X)$ «,$\chi(X^2)$».

In 1, S. 220, Z. 4 v.u. statt "$-$" «$-$».

In 1.26, statt $-3(\varphi, \psi)$ «$-3(\varphi, \psi)^*$».

In 3, letzte zwei Formeln, statt $-\frac{1}{3}\varrho\xi$ «$-\varrho\xi$», statt $\frac{1}{3}\varrho\omega$ «$\varrho\omega$».

In 4, vor (4.3), Formel für Θ_1, statt $dB_1 = -(\phi_1 + \frac{2}{3}\varrho_1)B$ «$dB_1 = -(\phi_1' + \frac{2}{3}\varrho_1)B$».

In 5, S. 228, Z. 7 v.u., statt $(0, 0, A, 0)$ «$(0, 0, 0, B)$».

In 5, S. 228, Z. 6 v.u., statt $(A, 0, 0, 0)$ «$(0, B, 0, 0)$».

In 7, Z. 3, statt $\mathfrak{A}_3$ «$\mathfrak{A}_1$».

In 7, Z. 3, statt $2\bar{\Delta}$ «$-2\bar{\Delta}$».

In 7, Z. 3, statt Δ «$\underline{\Delta}$».

In 7, S. 363, Z. 3 v.u., statt P_3 «$\underline{P}_3$».

In 7.1, 2, 3 fehlt die Bemerkung, dass der obere Summand zu der geraden, der untere zu der ungeraden Anzahl von Pluszeichen gehört.

In 8.4, statt 8.3 «8.2».

In 8.8, Z. 2, statt P «P_j».

In 8.12, letzter Absatz, füge man ein hinter "Wäre $U_0 \neq 0$" «und $X_0 \neq 0$», und schliesse man entsprechend weiter.

In 9, Z. 2, füge man ein hinter $\Theta^2 = 0$ «, $\Theta \neq 0$,».

In 9.3 vorletzte Z., statt 9.3.4 «9.2.4».

In 9.4 füge man hinter Formel 9.4.1 ein «$A \times A = 0$».

In 9.5, Z. 7, statt $[\Theta, [\Theta_1, [\Theta, \Theta]]]$ «$[\Theta, [\Theta_1, [\Theta_1, \Theta]]]$».

In 9.5.1 statt $-1/_{12}$ «$-1/_6$».

In 9.5, letzte Zeile, statt $1/_6$ «$1/_{12}$».

In 9.5 präzisiere man den Beweis in leicht ersichtlicher Weise.

In 9.8, S. 154, Z. 5, statt $(A, B) \leqq 0$ «$(A, B) < 0$».

In 9.8.1, statt $\chi(A \times B) \leqq 0$ «$\chi(A)\chi(B) < 0$».

In 9.8, S. 154, Z. 13–14, statt "für $B = \chi(A)A$" «ist B Vielfaches von A, so».

In 9.8, S. 154, Z. 15, statt $\geqq$ "$>$".

In 9.8, S. 154 ersetze man Z. 16–24 durch: «Daraus folgt die Behauptung. Bis jetzt haben wir $\varrho \neq 0$ vorausgesetzt. Für $\varrho = 0$ hat man nichts an $(A, B) \leqq 0$, aber aus Stetigkeitsgründen (siehe die Transitivität) gilt auch dann:»

In 9.10.1 statt $\chi(A \times B) \leqq 0$ «$\chi(A)\chi(B) \leqq 0$».

In 9.10 ersetze man den Text von S. 155, Z. 12 v.u., "Wir multi-

---

[1]) Diese Korrekturen verdanke ich zum grossen Teil Herrn F. D. VELDKAMP.

plizieren ..." bis S. 156, Z. 8 "... bestätigt" durch: «Wir nehmen die Spur

$$(A \times 1,\ M \times M) = \gamma\chi(B).$$

Nach 1.5 ist

$$\chi(A)\chi(M \times M) - (A,\ M \times M) = 2\gamma\chi(B),$$

ferner nach 1.6

$$\chi(M \times M) \leqq 0,$$
$$\chi(A)\chi(B)\chi(M \times M) \geqq 0,$$

und wegen $M \times M \in \mathfrak{P}$

$$|(A,\ M \times M)| \leqq |\chi(A)\chi(M \times M)|,$$
$$|\chi(B)(A,\ M \times M)| \leqq |\chi(A)\chi(B)\chi(M \times M)|,$$
$$\chi(B)(\chi(A)\chi(M \times M - (A,\ M \times M)) \geqq 0,$$

also $\gamma \geqq 0$.».

In 9.10, Z. 4 v.u., statt des ersten $-1/2$ «-2».

In 9.10, Z. 3 v.u., statt "$-$" «-4».

In 9.10, Z. 2 v.u., statt $-1/2$ «-2».

In 10.1, Beweis, Z. 3, statt $\mathfrak{N}$ «$\mathfrak{M}$».

In 11.6, Z. 2 nach 11.6.3, statt Vielfaches «$\times$-Vielfaches».

In 11.7.1 laute die letzte Formel

$$«4\varrho_1 B \times (A \times A_1) - (A_1,\ \varrho_1 B - \varrho B_1)A +$$
$$+ (A,\ \varrho B_1 - \varrho_1 B)A_1 - 4\varrho B_1 \times (A \times A_1) = 0».$$

In 12.2 findet sich eine ernsthafte Lücke. Man muss auch zeigen, dass unabhängige P_0, P_1 verschiedene Ebenen darstellen. Man darf

$$P_0 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$$

annehmen. Folgte für alle $\Theta \in \mathfrak{N}$ aus $\Theta P_0 = 0$ auch $\Theta P_1 = 0$, so ergäbe sich für alle

$$\Theta = (0,\ 0,\ A,\ 0),\ \ A \times A = 0,$$
$$P_1 = (X_1,\ U_1,\ \xi_1,\ \omega_1)$$

aus

$$\Theta P_1 = (\omega_1 A,\ \ 2A \times X_1,\ \ (A,\ U_1),\ 0) = (0,\ 0,\ 0,\ 0):$$
$$\omega_1 = X_1 = U_1 = 0, \text{ also } P_1 \text{ abhängig von } P_0.$$

In 12.2, Z. 4 v.u., statt 1 «ξ».

14. *Die Elemente von $\mathfrak{M}$ als Polaritäten der Oktavenebene.*

Die Worte Punkt, Gerade, Ebene und verbunden [1]) werden im Sinne von 12 gebraucht.

14.1 Sind P, Q zwei zueinander fremde Ebenen, so bezeichnen wir mit

$$P \to Q$$

---

[1]) Statt "verbindbar" wollen wir "verbunden" sagen.

die Abbildung, die einem Punkte Θ aus P die Gerade $\Theta Q \cap Q$ aus Q zuordnet (also die Menge der mit Θ verbundenen Punkte aus Q), und die einer Geraden aus P den mit dieser Geraden punktweise verbundenen Punkt aus Q zuordnet.

$P \to Q$ ist eine projektive Korrelation von P auf Q.

Sind $P_1, \ldots, P_n$ Ebenen, so dass jeweils P_{i+1} zu P_i fremd ist, so schreiben wir

$$(P_{n-1} \to P_n)(P_{n-2} \to P_{n-1}) \ldots (P_1 \to P_2) = P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_n.$$

14.2. Seien P_1, P_2, P_3 paarweise fremde Ebenen.

Dann ist $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$ eine *Polarität* von P_1 auf sich.

Beweis: Nach 13.1 darf man annehmen

$$P_1 = (0, 0, 1, 0),$$
$$P_2 = (0, 0, 0, 1),$$
$$P_3 = (X, U, \xi, \omega).$$

Sei Θ in P_1, also

$$\Theta = (0, 0, A, 0) \text{ mit } A \times A = 0.$$

Dem entspricht in P_2 die Gerade $\Theta P_2 \cap P_2$. Durch sie legen wir die Ebene

$$R = \alpha P_2 + \Theta P_2 = (A, 0, 0, \alpha),$$

die P_3 trifft (und zwar im Punkte $\Theta' = (P_1 \to P_2 \to P_3)\Theta$).

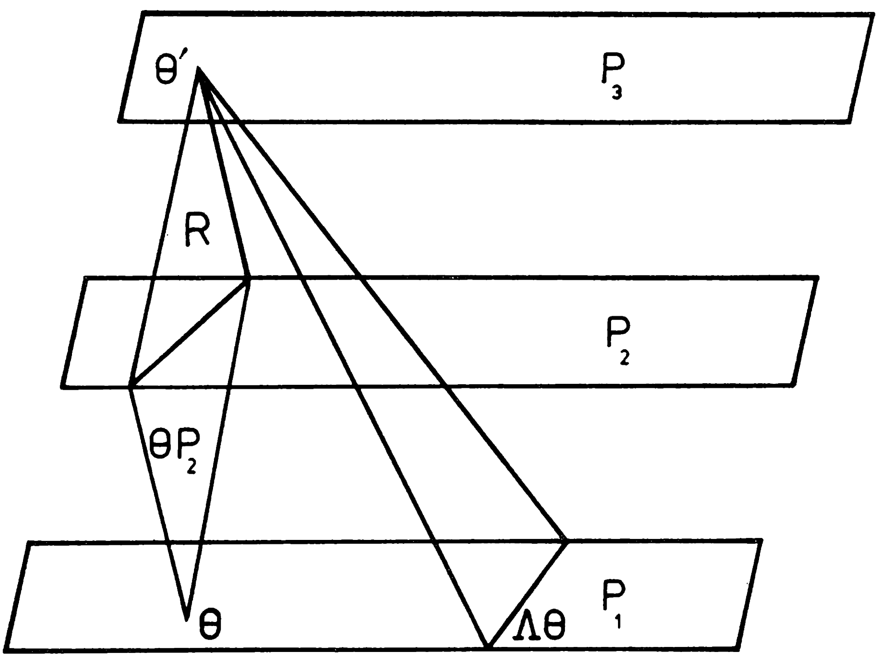

Fig. 1

Wir bestimmen also α so, dass $\{P_3, R\}=0$ wird, also

$$(A, U)=\alpha\xi.$$

Nun wird

$$\Theta'=2\xi P_3\times R=(*, *, *, {}^1/_2(2\xi A\times X-(A, U)U)).$$

Nach 12.2 finden wir die Gerade $(P_1\to P_2\to P_3\to P_1)\Theta$ aus

$$(\xi R\times P_3)P_1=(0, *, 2\xi A\times X-(A, U)U, 0)$$

in der Form

$$\Lambda A=2\xi A\times X-(A, U)U, \tag{14.2.1}$$

oder auch wegen $U\times U=\xi X$,

$$\Lambda A=2(U\times U)\times A-(A, U)U. \tag{14.2.2}$$

Man bemerkt, dass wegen der paarweisen Fremdheit der P_i gilt: $\xi\neq 0$, $\omega\neq 0$, also det $X\neq 0$, det $U\neq 0$.

Es ist hier

$$(\Lambda A, A_1)=(A, \Lambda A_1).$$

Also, wenn A_1 auf ΛA liegt, geht ΛA_1 durch A. Es liegt daher eine Polarität vor.

14.3 Man kann natürlich auch direkt zeigen, dass 14.2.1 für jedes $U\in\mathfrak{J}$ mit det $U\neq 0$ eine Polarität $\Lambda=\Lambda_U$ definiert. Diese Polaritäten haben die spezielle Eigenschaft:

14.3.1. A, A_1 und die Schnittpunkte von $A\times A_1$ mit ΛA und ΛA_1 liegen auf einer *reellen* projektiven Geraden.

Denn

$$\begin{aligned}&(U, A_1)(A\times A_1)\times\Lambda A-(U, A)(A\times A_1)\times\Lambda A_1\\&=2\xi(U, A_1)(A\times A_1)\times(X\times A)-2\xi(U, A)(A\times A_1)\times(X\times A_1)\\&=\tfrac{3}{2}\,\xi(A, A_1, X)((U, A_1)A-(U, A)A_1)\end{aligned}$$

(nach 1.17).

Wir wollen Polaritäten mit dieser Eigenschaft mit J. Tits [1]) *hermitesch* nennen.

14.4. Wir zeigen, dass alle hermiteschen Polaritäten die Form 14.2.1–2 besitzen.

Wir bemerken zunächst, dass bei einer projektiven Transformation Φ der Ebene Polaritäten in Polaritäten und hermitesche in hermitesche übergehen, weiter dass die Polarität Λ_U übergeht in die Polarität $\Lambda_{\Phi^* U}$ (wo Φ^* die zu Φ gehörige Transformation der Geradenebene angibt); es ist nämlich

$$\begin{aligned}\Phi^*\Lambda\Phi^{-1}A_1&=2(\Phi^*U\times\Phi^*U)\times\Phi\Phi^{-1}A_1-(\Phi^{-1}A_1, U)\Phi^*U\\&=2(\Phi^*U\times\Phi^*U)\times A_1-(A_1, \Phi^*U)\Phi^*U.\end{aligned}$$

---

[1]) Siehe etwa Mém. Acad. Belg. **29** (1955), No. 3, 56–57.

Zu gegebener hermitescher Polarität Λ wählen wir einen Punkt E_1, der nicht mit seiner Bildgeraden inzidiert, und auf dieser einen Punkt E_2 mit derselben Eigenschaft (das ist, wie man leicht sieht, möglich). Die Punkte $E_1, E_2, E_3 = \Lambda E_1 \times \Lambda E_2$ und die Geraden $\Lambda E_1, \Lambda E_2, E_1 \times E_2$ können wir nach Obigem bzw. in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

annehmen. Nimmt man weiter

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und setzt man U in der Form

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

an, so wird

$$\Lambda_U E_i = -\lambda_i E_i \qquad \text{für } i = 1, 2, 3$$

und

$$\Lambda_U E_0 = -\begin{pmatrix} \lambda_1{}^2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_3 \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2{}^2 & \lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_3{}^2 \end{pmatrix},$$

und das durchläuft alle (nicht durch die Punkte E_1, E_2, E_3 gehenden) Geraden der von E_0, E_1, E_2, E_3 bestimmten reellen projektiven Ebene, wenn die λ_i alle reellen Zahlen $\neq 0$ durchlaufen; dabei nimmt $\Lambda_U E_0$ alle Werte an, die mit der Forderung 14.3.1 verträglich sind.

Es ist noch zu zeigen, dass zwei solche hermiteschen Polaritäten, Λ, Λ_1, die in den $E_i (i = 0, 1, 2, 3)$ übereinstimmen, identisch sind. Die Projektivität $\Lambda\Lambda_1$ besitzt die Fixpunkte $E_i (i = 0, 1, 2, 3)$, wird also von einem Automorphismus ϑ des Oktavenkörpers erzeugt [1]). Also $\Lambda_1 = \Lambda\vartheta$. Für Λ können wir Λ_U nehmen. Auf die Punkte

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ \bar{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wenden wir $\Lambda\vartheta$ an:

$$\Lambda\vartheta F = \begin{pmatrix} \lambda_1{}^2 & \lambda_2\lambda_1 & 0 \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda\vartheta A = \begin{pmatrix} \lambda_1{}^2 & \lambda_1\lambda_2\vartheta a & 0 \\ \lambda_1\lambda_2\vartheta\bar{a} & \lambda_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Siehe OAO, Anhang.

Die Forderung, dass diese Punkte mit F und A auf einer reellen Geraden liegen, ergibt: $1, a, \vartheta a$ sind reell abhängig. Für rein imaginäre a folgt hieraus die Reell-Abhängigkeit von a und ϑa, also $\vartheta a = a$ für alle a. Demnach ist ϑ die Identität.

14.5. Bei der hermiteschen Polarität A_U findet man für die Punkte A, die mit ihrem Bilde inzidieren:

$$(A, U) = 0.$$

Das ist höchstens eine 15-dimensionale Mannigfaltigkeit der Oktavenebene, ein sogen. *Kegelschnitt.*

14.6. Man erhält (einfach) *entartete Polaritäten*, wenn man in 14.2 zulässt, dass P_1, P_3 sich in einem Punkt treffen. Man hat dann $\omega = 0$, also $X \times X = 0$, also $\det U = 0$. Der Treffpunkt von P_1 und P_3 ist X. Die Abbildung A (siehe 14.2.1–2) ist für alle Punkte $\neq X$ definiert; X heisst die *Singularität* von A. Alle Bildgeraden gehen durch X. Zwei Punkte auf derselben Geraden durch X haben dieselbe Bildgerade. Wie bei nichtentarteten Polaritäten gilt: Liegt A_1 auf dem Bild von A, so liegt A auf dem Bild von A_1.

Sei ausser der entarteten Polarität A eine Gerade B, nicht durch X, gegeben. Dann gibt es eine nichtentartete hermitesche Polarität A', die auf B mit A übereinstimmt. (Man nehme nämlich durch die Gerade $(P_1 \to P_2 \to P_3)B$ eine Ebene P_3', die $P_1 \cup P_2$ nicht trifft und definiere $A' = P_1 \to P_2 \to P_3' \to P_1$.)

Unter einer entarteten *hermiteschen* Polarität mit der Singularität X verstehen wir eine Abbildung A, bei der jedem Punkte $\neq X$ der Ebene eine Gerade durch X entspricht, bei der aus der Inzidenz von A_1 mit AA die von A mit AA_1 folgt, und die auf einer nicht durch X gehenden Geraden mit einer geeigneten nichtentarteten hermiteschen Polarität übereinstimmt.

Man sieht ohne weiteres, dass das angegebene Verfahren genau alle entarteten hermiteschen Polaritäten liefert.

15. *Die Elemente von $\mathfrak{R}$ als Perspektivitäten der Oktavenebene.*

15.1. P_1, P_2, P_3, P_4 seien vier Ebenen, derart dass sich P_1 und P_3, ebenso P_2 und P_4 in einer Geraden schneiden, und im Übrigen die Durchschnitte leer sind. Dann ist $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_1$ eine Perspektivität Π von P_1 mit der Achse $P_1 \cap P_3$ und mit demjenigen Punkte von P_1 als Scheitel, der mit $P_2 \cap P_4$ punktweise verbunden ist.

Wir rechnen $\Pi\Theta$ aus, indem wir

$$\begin{array}{ll} P_1 = (0, 0, 1, 0), & P_2 = (0, 0, 0, 1), \\ P_3 = \Theta_1 P_1, & P_4 = \text{Ebene durch } P_2 \cap \Theta_1 P_2, \text{ die } \Theta_0 P_1 \text{ trifft}, \\ \Theta_1 = (\Phi_1, \varrho_1, A_1, B_1), & \Theta_0 = (\Phi_0, \varrho_0, A_0, B_0), \\ \Theta = (0, 0, A, 0), & \Theta, \Theta_1, \Theta_0 \in \mathfrak{R}, \ \Theta \in P_1 \end{array}$$

wählen.

Wir müssen erst die Ebene

$$\alpha P_2 + \beta \Theta P_2 = (\beta A, 0, 0, \alpha)$$

so bestimmen, dass sie $P_3 = (0, B_1, -\varrho_1, 0)$ trifft.

$$\{\alpha P_2 - \beta \Theta P_2, P_3\} = 0$$

ergibt

$$\beta (A, B_1) + \alpha \varrho_1 = 0.$$

Das führt zur Ebene

$$(\varrho_1, A, 0, 0, -(A, B_1)).$$

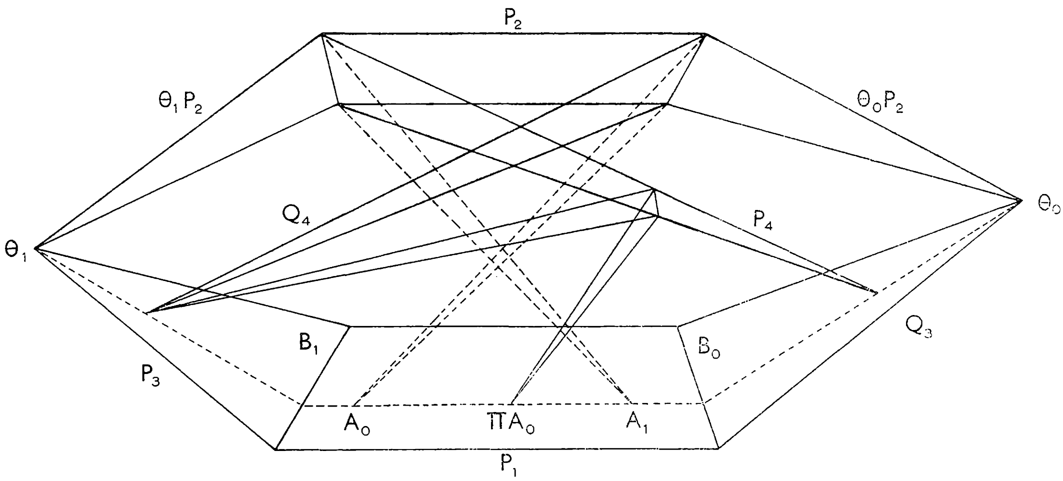

Fig. 2

Sie trifft P_3 in

$$\Theta' = (\tfrac{1}{2}\varrho_1 \langle A, B_1 \rangle, \tfrac{1}{4}\varrho_1 (A, B_1), -\tfrac{1}{4}\varrho_1^2 A, \tfrac{1}{4}(A, B_1) B_1) = (P_1 \to P_2 \to P_3)\Theta.$$

$$P_4 = (\varrho_0 A_1, 0, 0, -(A_1, B_0)).$$

$$\Theta' P_4 = (\tfrac{1}{2}\varrho_1\varrho_0 \langle A, B_1 \rangle A_1 + \tfrac{1}{12}\varrho_1\varrho_0 (A, B_1) A_1 + \tfrac{1}{4}\varrho_1^2 (A_1, B_0) A,$$
$$-\tfrac{1}{2}\varrho_1^2\varrho_0 A \times A_1, 0, \; -\tfrac{1}{4}\varrho_1 (A_1, B_0)(A, B_1) \; -\tfrac{1}{4}\varrho_1^2\varrho_0 (A, B_1)).$$

Wir bestimmen die Ebene

$$\lambda P_4 + \mu \Theta' P_4$$

so, dass sie P_1 trifft.

$$\{\lambda P_4 + \mu \Theta' P_4, P_1\} = 0$$

ergibt etwa

$$\lambda = \varrho_1^2 \varrho_0 (A, B_1) + \varrho_1 (A_1, B_0)(A, B_1),$$
$$\mu = -4(A_1, B_0).$$

Vom Treffpunkt braucht nur die dritte Komponente berechnet zu werden. Sie lautet

$$\varrho_1\varrho_0 (A, B_1)(\varrho_1\varrho_0 + (A_1, B_0)) A_1 - 2\varrho_1\varrho_0 (A_1, B_0)\langle A, B_1 \rangle A_1$$
$$-3\varrho_1\varrho_0 (A_1, B_0)(A, B_1) A_1 - \varrho_1^2 (A_1, B_0)^2 A.$$

Nach einfacher Umformung erhält man für $\Pi\Theta$ den Ausdruck

$$\Pi^{\varkappa}_{A_1, B_1} A = -\frac{(A, B_1)}{\varkappa} A_1 + 4B_1 \times (A_1 \times A) - \frac{(A_1, B_1)}{1-\varkappa} A \tag{15.1.1}$$

mit

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{\varrho_1\varrho_0}{(A_1, B_0)} + 1, \qquad \frac{1}{1-\varkappa} = \frac{(A_1, B_0)}{\varrho_1\varrho_0} + 1. \tag{15.1.2}$$

Nach 11.3.3 ist $\varkappa$ das Doppelverhältnis der Perspektivität.

15.2. Einem Punkt $\Theta_1 \in \mathfrak{N}$ in allgemeiner Lage wird also eine Perspektivität der Oktavenebene P zugeordnet. Das war schon in 11 geschehen, allerdings rein algebraisch, während wir es nun durch eine geometrische Konstruktion getan haben. Dem Punkte

$$\Theta_1 = (\Phi_1, \varrho_1, A_1, B_1)$$

ist die Perspektivität mit Scheitel A_1, Achse B_1 und Doppelverhältnis $\varkappa$ (siehe 15.1.2) zugeordnet. Wir nennen sie auch

$$\Pi^{\Theta_1, \Theta_0}.$$

Sie hängt noch vom "Aufpunkt" Θ_0 ab.

15.3. Die Verbundenheit der Punkte Θ_1, Θ_0 drückt sich nach 10.2.2 und 11.7.1 durch

$$4\varrho_1 B_0 \times (A_0 \times A_1) - (A_1, \varrho_1 B_0 - \varrho_0 B_1) A_0 + (A_0, \varrho_0 B_1 - \varrho_1 B_0) A_1$$
$$- 4\varrho_0 B_1 \times (A_0 \times A_1) = 0$$

und

$$(A_1, B_0) = (A_0, B_1)$$

aus. Hieraus folgt (siehe (15.1.1))

$$\Pi^{\varkappa}_{A_1, B_1} A_0 = 4\frac{\varrho_1}{\varrho_0} B_0 \times (A_1 \times A_0).$$

Umgekehrt rechnet man leicht aus, dass diese Bedingung auch hinreichend für die Verbundenheit von Θ_1 und Θ_0 ist. Anders gesagt:

Notwendig und hinreichend für die Verbundenheit von

$$\Theta_1 = (\Phi_1, \varrho_1, A_1, B_1)$$

und

$$\Theta_0 = (\Phi_0, \varrho_0, A_0, B_0)$$

ist im Allgemeinen, das Π^{Θ_1, Θ_0} den zu Θ_0 gehörigen Scheitel abbildet auf einen Punkt der zu Θ_0 gehörigen Achse.

15.4. Das "im Allgemeinen" bedarf näherer Erläuterung. Zunächst müssen wir, um Perspektivitäten mit nichtinzidentem Scheitel und Achse zu erhalten, verlangen, dass

$$(A_0, B_0) \neq 0, \qquad (A_1, B_1) \neq 0 \tag{15.4.1}$$

ist, oder auch

(15.4.2) durch Θ_i geht keine Gerade, die P_1 und P_2 trifft.

Damit die angegebene Konstruktion von Π möglich sei, müssen wir weiter fordern:

$$\Theta_0 \notin P_1 \cup P_2\ ,\quad \Theta_1 \notin P_1 \cup P_2\ ,\quad P_2 \cap \Theta_1 P_2 \cap Q_3 \text{ leer},$$
$$P_2 \cap P_3 \text{ leer},\quad P_1 \cap P_4 \text{ leer},\quad P_3 \cap P_4 \text{ leer}.$$

Forderungen 1, 2, 4 sind nach Obigem schon erfüllt, 3 und 5 lassen sich durch

(15.4.3) $$(A_1, B_0) \neq 0$$

erfüllen, 6 durch

(15.4.4) $$(A_1, B_0) \neq -\varrho_0\varrho_1.$$

Zu den Betrachtungen von 15.3 braucht man noch

(15.4.5) $$A_0 \times A_1 \neq 0.$$

Zu (15.4.4) bemerkt man noch: Ist $(A_1, B_0) + \varrho_0\varrho_1 = 0$, so ergibt sich aus 11.7.1

(15.4.6) $$B_0 \times (A_0 \times A_1) \sim B_1 \times (A_0 \times A_1),$$

d.h. B_0 und B_1 gehen durch denselben Punkt von $A_0 \times A_1$.

Man kann also die Aussage von 15.4 so präzisieren:

Man setze voraus: $\Theta_0 \notin P_1 \cup P_2$, $\Theta_1 \notin P_1 \cup P_2$; es gibt kein inzidentes Paar C (Punkt), D (Gerade), so dass A_0, A_1 auf D liegen und B_0, B_1 durch C gehen.

Dann und nur dann sind Θ_0, Θ_1 verbunden, wenn $\Pi^{\Theta_1, \Theta_0} A_0 \in B_0$ sinnvoll und richtig ist.

16. *Axiome für* $Sy(5, ok)$.

Wir sind nun so weit, dass wir die in 12 algebraisch auseinandergesetzte Geometrie axiomatisch aufbauen können.

16.1. Legen wir statt des Oktavenbereichs den der reellen Zahlen zugrunde, so ist jene Geometric mit ihren Punkten und ihrer Verbundenheitsrelation gerade die 5-dim. reelle symplektische Geometrie – statt "verbunden" pflegt man dort "konjugiert" zu sagen. Die Darstellung der $\mathfrak{C}_3$, die bei uns zum Vorschein kam, ist aber nicht die übliche, π_1, im 6-dim. Vektorraum, sondern $2\pi_1$, in einem 21-dim. Vektorraum. Die Punktmenge der Geometrie ist also nicht direkt der 5-dim. projektive Raum, sondern eine diesem isomorphe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ in 21 Dimensionen; die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der Ebenen ist in 14 Dimensionen eingebettet, mit der Darstellung π_2.

Es ist nun ganz natürlich, bei Zugrundelegung des Körpers der komplexen Zahlen, Quaternionen, Oktaven von der

fünfdimensionalen symplektischen Geometrie

über dem betreffenden Körper zu sprechen. Statt "symplektische Geometrie" sagen wir auch Symplekton [1]).

[1]) Besser wäre "Symplexis", aber das gestattet in vielen Sprachen keine angenehme Mehrzahlform.

Wir kürzen ab:

$$\mathrm{Sy}(5, \mathrm{re}),\ \mathrm{Sy}(5, \mathrm{ko}),\ \mathrm{Sy}(5, \mathrm{qu}),\ \mathrm{Sy}(5, \mathrm{ok}).$$

Um vorläufig die algebraisch definierte Geometrie von der zu definierenden axiomatischen unterscheiden zu können, fügen wir noch hinzu: al(algebraisch) oder ax(axiomatisch).

16.2. Die Elemente von Sy ax(5, $*$) sind

1. eine Menge $\mathfrak{N}$, deren Elemente *Punkte* heissen und meistens mit Θ (mit Indizes) bezeichnet werden,

2. eine zweistellige, reflexive, symmetrische Relation für die Paare aus $\mathfrak{N}$, die *Verbundenheit* heisse.

16.3. Die maximalen Mengen paarweise verbundener Punkte heissen Ebenen; die Menge dieser Ebenen heisse $\mathfrak{M}$; Elemente von $\mathfrak{M}$ werden mit P, Q, R, S bezeichnet.

16.4. Durchschnitte zweier verschiedener solcher Ebenen heissen Geraden, wenn sie aus mehr als einem Punkte bestehen; sie werden mit Ω (mit Indizes) bezeichnet.

Definitionsgemäss gibt es durch jede Gerade wenigstens zwei Ebenen.

16.5. $\mathfrak{M}$ ist sicher nicht leer. Sollte $\mathfrak{N}$ leer sein, so wäre die leere Menge die einzige Ebene. Wir fordern aber:

Axiom A_*: Jede Ebene mit ihren Punkten und Geraden ist eine projektive $*$-Ebene.

Insbesondere

Axiom A_{ok}: Jede Ebene mit ihren Punkten und Geraden ist eine projektive Oktavenebene.

Wir werden aber auch einige Konsequenzen von A_{re}, A_{ko}, A_{qu} erörtern.

16.6. Seien Θ_0 ein Punkt und P eine Ebene, $\Theta_0 \notin P$. Die Menge der mit Θ_0 verbundenen $\Theta \in P$ heisse Γ. Die Vereinigung von Θ_0 und Γ besteht aus paarweise verbundenen Punkten; also gibt es eine Θ_0 und Γ enthaltende Ebene Q. Nach 16.4 ist $\Gamma = P \cap Q$ leer oder ein Punkt oder eine Gerade. Wir fordern das letzte:

Axiom B: Ist Θ ein Punkt und P eine Ebene, $\Theta \notin P$, so ist die Menge der mit Θ verbundenen Punkte aus P eine Gerade.

16.7. Wir können auch sagen:

Zu Θ und P mit $\Theta \notin P$ gibt es genau eine Ebene durch Θ, die P in einer Geraden schneidet. Diese Ebene nennen wir ΘP.

16.8. Aus A_* folgt noch: Hat die Gerade Ω zwei Punkte Θ_1, Θ_2 in der Ebene P, so liegt sie ganz in P.

Denn $\Omega = P_1 \cap P_2$, $P_1 \neq P_2$. Also etwa $P_1 \neq P$. $\Theta_i \in P_1 \cap P$, $\Theta_i \in P_2 \cap P$. Nun ist $P_1 \cap P$ eine Gerade in P, $P_2 \cap P$ eine Gerade in P oder gleich P; also $P_1 \cap P \subset P_2 \cap P$. Also $P_1 \cap P \subset P_1 \cap P_2 \cap P = \Omega \cap P \subset \Omega$. Nun sind $P_1 \cap P$ und Ω Geraden in P_1, die Θ_1, Θ_2 enthalten. Also $\Omega = P_1 \cap P \subset P$.

16.9. Hieraus folgt: Durch zwei Punkte Θ_1, Θ_2 gibt es höchstens eine Gerade, die wir dann mit $\Theta_1\Theta_2$ bezeichnen.

16.10. Zweckmässig sind noch andere Formulierungen früher erwähnter Tatsachen:

Ist Θ verbunden mit drei nicht-kollinearen Punkten der Ebene P, so liegt Θ in P.

Schneiden die Ebenen P_1, P_2 sich in einer Geraden Ω und sind $\Theta_1 \in P_1$, $\Theta_2 \in P_2$ verbunden, so liegt Θ_1 oder Θ_2 in Ω.

Schneiden P_1 und P_2 sich in einer Geraden und trifft P sowohl P_1 als auch P_2, so liegt $P \cap (P_1 \cup P_2)$ in P_1 oder in P_2.

16.11. Sind die Gerade Ω und die Ebene P zueinander fremd, so gibt es genau einen Punkt Θ in P, der mit Ω punktweise verbunden ist, und genau eine Ebene Q durch Ω, die P trifft.

Denn nimmt man $\Theta_1 \neq \Theta_2$, $\Theta_1, \Theta_2 \in \Omega$, so sind die Geraden $P \cap \Theta_1 P$ und $P \cap \Theta_2 P$ nach 16.10 verschieden; ihr Schnittpunkt ist das gesuchte Θ. Das gesuchte Q wird durch $\Theta, \Theta_1, \Theta_2$ bestimmt.

Es gilt auch $Q = \Theta_1\Theta_2 P$. Wir bezeichnen diese Ebene mit ΩP.

16.12. Trifft die Gerade Ω die Ebene P in *einem* Punkt Θ_0, so bilden die mit Punkten $\neq \Theta_0$ von Ω verbundenen Punkte von P eine Gerade Ω' durch Θ_0; es gibt dann durch Ω genau eine Ebene Q, die P in einer Geraden (nämlich in Ω') schneidet.

Denn ist $\Theta \in \Omega$, $\Theta \neq \Theta_0$, so liegt Θ_0 auf ΘP; es ist $\Omega' = P \cap \Theta P$.

16.13. Ist Θ ein Punkt und Ω eine Gerade, so ist Θ entweder mit allen Punkten von Ω verbunden oder mit genau einem (sogen. *allgemeine Lage*).

Denn sei P eine Ebene durch Ω. Dann ist entweder $\Theta \in P$ oder $\Theta P \cap P$ eine Gerade, die entweder mit Ω zusammenfällt oder Ω schneidet. In den ersten Fällen liegen Θ und Ω in einer Ebene; im letzten Fall ist der Schnittpunkt der gesuchte Punkt.

16.14. Wenn die Geraden Ω_1 und Ω_2 einander nicht treffen und eine Ebene P_1 durch Ω_1 existiert, die Ω_2 trifft, so existiert eine Ebene P_2 durch Ω_2, die Ω_1 trifft.

Denn nach 16.12 gibt es eine Ebene P_2 durch Ω_2, die P_1 in einer Geraden Ω' schneidet; Ω_1 und Ω' liegen in P_1 und schneiden einander.

16.15. *Allgemeine Lage* von Ω_1 und Ω_2 bedeute, dass Ω_2 keine Ebene durch Ω_1 trifft.

Allgemeine Lage bedeute übrigens: bei zwei Punkten – Nichtverbundenheit; bei zwei Ebenen, einer Ebene und einer Geraden, einer Ebene und einem Punkt – Fremdheit.

"In allgemeiner Lage" wird abgekürzt: i.a.L.

16.16. Zwei Ebenen P_1, P_2 i.a.L. bestimmen eine Abbildung $P_1 \to P_2$, so dass

$$(P_1 \to P_2)\Theta = \Theta P_2 \cap P_2 \qquad \text{für } \Theta \in P_1,$$
$$(P_1 \to P_2)\Omega = \Omega P_2 \cap P_2 \qquad \text{für } \Omega \subset P_1.$$

Diese Abbildung ist eine projektive Korrelation. Wie früher setzen wir

$$(P_{n-1} \to P_n)(P_{n-2} \to P_{n-1}) \cdots (P_1 \to P_2) = P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_n.$$

16.17. *Axiom C*: Seien die Ebenen P_1, P_2, P_3 paarweise i.a.L. Dann ist

$$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$$

eine Polarität von P_1 auf sich (d.h. das Quadrat ist die Identität).

16.18. Dieses Axiom lässt sich auch als Schliessungssatz aussprechen. Die Schliessungsfigur besteht aus drei Punkten Θ_i, drei Geraden Ω_j und neun Ebenen P_{ij} derart, dass Θ_i und Ω_j auf P_{ij} liegen.

16.19. Sind Ω_1, Ω_2 i.a.L., und durchlaufen Q_1, Q_2 die Büschel mit Ω_1 bzw. Ω_2 als Achse, so dass jeweils Q_1 und Q_2 einander treffen, so durchläuft ihr Treffpunkt eine Menge $\Delta(\Omega_1, \Omega_2)$. Der Schliessungssatz sagt, dass $\Delta(\Omega_1, \Omega_2) = \Delta(\Omega_1, \Omega_3)$, sobald sie zwei Punkte Θ_1, Θ_2 gemein haben – allerdings vorlaüfig nur unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass auch Ω_2, Ω_3 i.a.L. sind.

16.19.1. Sobald wir wissen, dass es durch jede Gerade mindestens drei Ebenen gibt (siehe 17), können wir uns von dieser Voraussetzung befreien. Zunächst bemerkt man, dass Ω_2, Ω_3, wenn sie nicht i.a.L. sind, sich treffen (aber nicht in einer Ebene liegen); andernfalls gäbe es nämlich Ebenen P_i durch Ω_i, so dass P_2 von Ω_3 in Θ_3' und P_3 von Ω_2 in Θ_2' getroffen wird und $\Theta_2' \neq \Theta_3'$ ist, und dann müssten Θ_1, Θ_2 auf $P_2 \cap P_3$ liegen, also verbunden sein.

Man wähle nun $\Theta' \in \Omega_3, \notin \Omega_2$, nenne Θ'' den mit Θ' verbundenen Punkt von Ω_1, und wähle durch $\Theta_1\Theta'$ eine Ebene Q, die weder durch Θ'', noch durch $\Omega_2 \cap \Omega_3$ geht. $\Omega_4 = \Theta_2 Q \cap Q$ trifft weder Ω_1 noch Ω_2, ist also zu beiden i.a.L. Nun sind $\Theta_1, \Theta_2 \in \Delta(\Omega_1, \Omega_2) \cap \Delta(\Omega_1, \Omega_4)$, also $\Delta(\Omega_1, \Omega_2) = \Delta(\Omega_2, \Omega_4)$. Sei $\Theta_3 \in \Delta(\Omega_1, \Omega_2)$, dann $\Theta_3 \in \Delta(\Omega_2, \Omega_4)$, also verbunden mit $\Omega_2 \cap \Omega_3$ und mit $\Omega_3 \cap \Omega_4$, also punktweise mit Ω_3, also $\Theta_3 \in \Delta(\Omega_1, \Omega_3)$. Also $\Delta(\Omega_1, \Omega_2) \subset \Delta(\Omega_1, \Omega_3)$ und ebenso umgekehrt.

Wir haben dann: $\Delta(\Omega_1, \Omega_2)$ ist durch zwei seiner Punkte bestimmt.

16.19.2. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, entartete Polaritäten zu erhalten:

Die Ebenen P_1, P_2 mögen sich in *einem* Punkt treffen, während P_3 sich zu beiden i.a.L. befinde. Die folgenden Abbildungen sind dann sinnvoll für $\Theta_1 \neq P_1 \cap P_2$:

$$(P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1)\Theta_1 = (P_2 \to P_3 \to P_1)\Omega_2 = (P_3 \to P_1)\Theta_3 = \Omega_1,$$
$$(P_1 \to P_3 \to P_2 \to P_1)\Theta_1 = (P_3 \to P_2 \to P_1)\Omega_3 = (P_2 \to P_1)\Theta_2 = \Omega_1$$

wegen des Schliessungssatzes 16.19.1. Also

$$(P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1)\Theta_1 = (P_1 \to P_3 \to P_2 \to P_1)\Theta_1$$

für $\Theta_1 \neq P_1 \cap P_2$.

Das ergibt auch: Ist Θ' auf $(P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1)\Theta$, so geht $(P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1)\Theta'$ durch Θ.

16.20. Sind Θ_1, Θ_2 Punkte i.a.L., und durchlaufen Q_1, Q_2 bzw. die Bündel mit Θ_1 bzw. Θ_2 als Scheitel, so dass jeweils Q_1 und Q_2 einander in einer Geraden schneiden, so durchläuft ihre Schnittgerade eine Menge $\Delta^*(\Theta_1, \Theta_2)$ von Geraden. Der Schliessungssatz sagt, dass $\Delta^*(\Theta_1, \Theta_2)$ durch zwei seiner Elemente i.a.L. bestimmt ist.

16.21. Seien Ω_1, Ω_2 Geraden i.a.L. und sei jeweils $\Theta \in \Omega_1$ verbunden mit $\varphi(\Theta) \in \Omega_2$. Dann ist φ eine Projektivität.

Denn wählt man P_1 durch Ω_1 mit leerem $P_1 \cap \Omega_2$ und weiter P_2 durch Ω_2 mit $P_2 \neq \Omega_2 P_1$, so sind P_1, P_2 i.a.L. und ist $\varphi(\Theta) = \Omega_2 \cap ((P_1 \to P_2)\Theta)$ für $\Theta \in \Omega_1$.

16.22. Sind $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ paarweise i.a.L. und ist φ_{ij} die zu Ω_i, Ω_j nach 16.21 gehörige Projektivität, so ist $\varphi_{31}\varphi_{23}\varphi_{12}$ eine Involution.

Das folgt aus Axiom C, sobald man weiss, dass P_i durch Ω_1 existieren, so dass P_1, P_2, P_3 i.a.L. sind. Wir zeigen das später (siehe 19).

16.23. Zu 16.22 gehört folgende Schliessungsfigur von sechs Punkten $\Theta_i (i = 1, \ldots, 6)$ und neun Geraden:

Θ_i verbunden mit $\Theta_{i-1}, \Theta_{i+1}, \Theta_{i+3}$ (mit i mod 6 gerechnet).